Variables angle-action

Système intégrable avec orbites périodiques

Transformation canonique -> une variable compacte = angle

$$\Delta Q \equiv \oint \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}q}\mathrm{d}q = 2\pi$$ =Intégrale sur une période

Transformation canonique

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial F_2}{\partial P}\right) + \frac{\partial^2 F_2}{\partial P^2}\underbrace{\cancel{\frac{\partial P}{\partial q}}}_{=0}$$

P=const. le long d'une trajectoires

$$\boxed{I = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\partial W}{\partial q}(q;\alpha)\mathrm{d}q}$$

I est une action car dW/dq=p (impulsion) [trsf. canonique avec W de type F2]

L'intégrale donne une fonction de l'énergie, qui peut être inversée, pour obtenir le nouvel Hamiltonien.

Ex: oscillateur harmonique : I=E/omega -> E=H=omega I

Variables angle-action

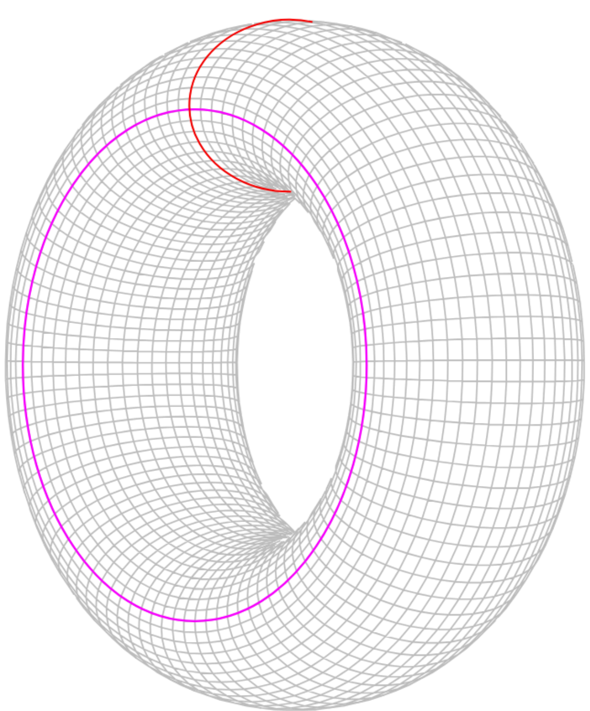
Le nouvel Hamiltonien ne dépend que de l’action

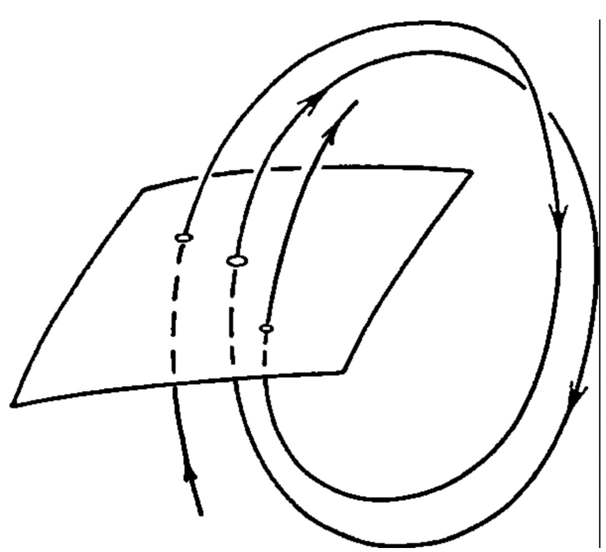
-> angle = variable cyclique
-> action = conservée
-> évolution linéaire de l’angle ~I t

En dimension supérieure : séparabilité

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W_k}{\partial q_k}(q_k; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mathrm{d}q_k$$

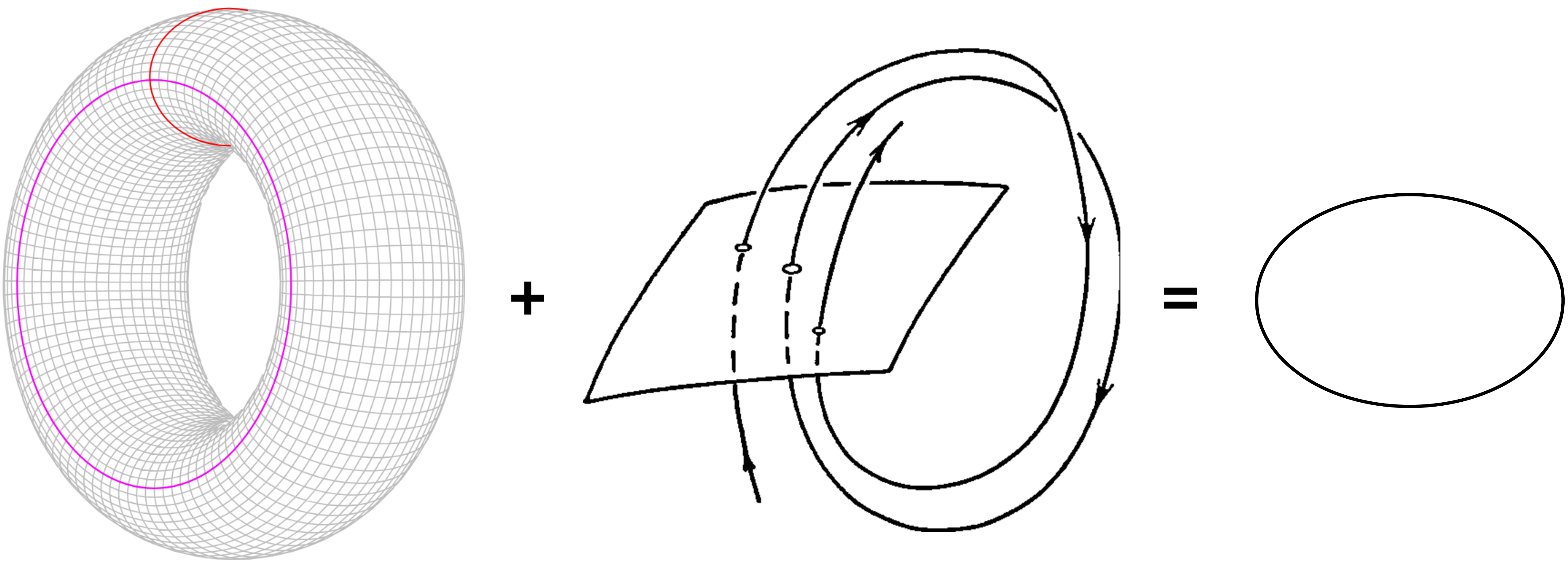
A chaque I_k correspond un angle = variable compacte; évolution fixée par I_k
-> mouvement sur un n-tore = tore invariant





Variables angle-action

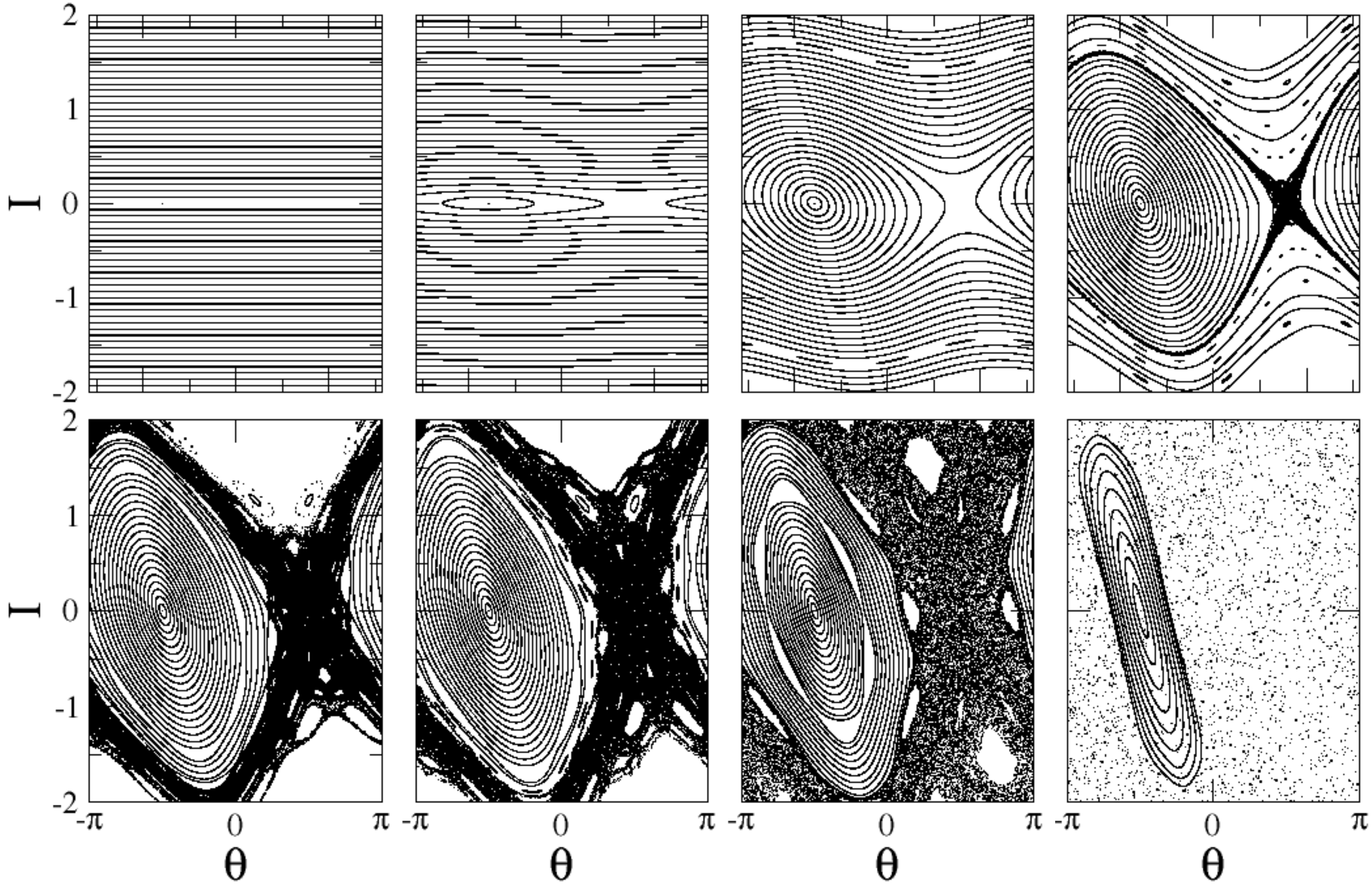
Visualisation du mouvement en dimension supérieure : section de Poincaré



La section donne une courbe lisse, bien définie
-> système intégrable / mouvement régulier

La section donne une suite de points répartis de façon erratique
-> système non-intégrable / mouvement chaotique

Intégrabilité, perturbations et émergence du chaos
dans l’espace de phase



Structures particulières de l’espace de phase

Systèmes conservatifs:

Point fixe: stable / instable

Structures particulières de l’espace de phase

Systèmes conservatifs:

Point fixe: stable / instable

Systèmes dissipatifs:

Attracteurs :

Structures particulières de l’espace de phase

Systèmes conservatifs:

Point fixe: stable / instable

Systèmes dissipatifs:

Attracteurs :

1) point fixe: stable / asymptotiquement stable / instable

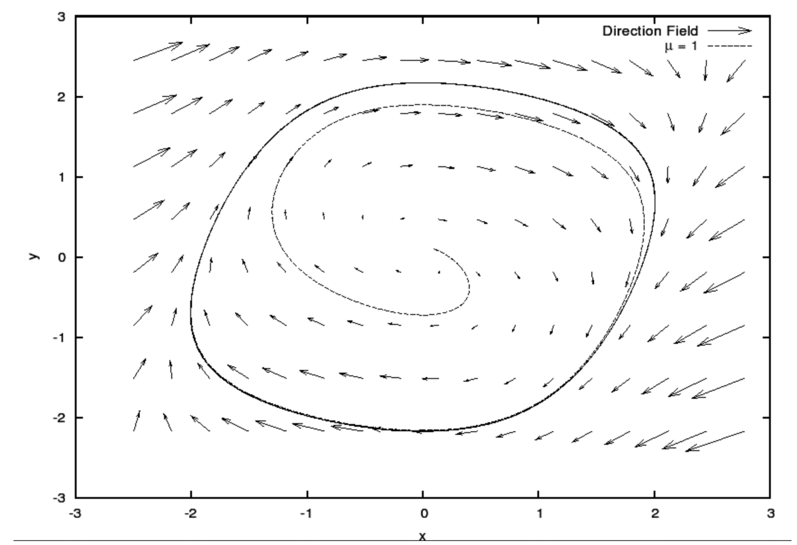
Structures particulières de l'espace de phase

Systèmes conservatifs:
Point fixe: stable / instable

Systèmes dissipatifs:
Attracteurs :

1) point fixe: stable / asymptotiquement stable / instable

2) cycle limite:
Ex: oscillateur de van der Pol



$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} - \varepsilon\omega_0 \left(1 - x^2(t)\right) \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Structures particulières de l'espace de phase

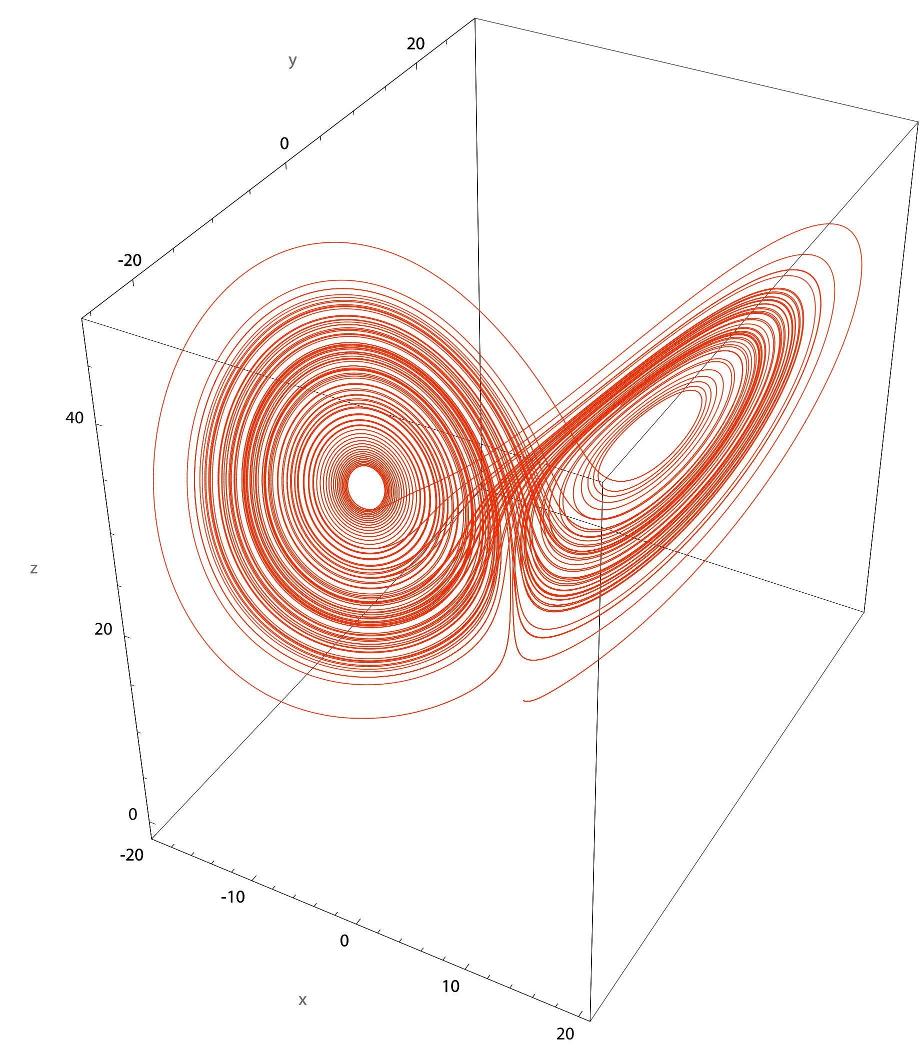
Systèmes conservatifs:
Point fixe: stable / instable

Systèmes dissipatifs:
Attracteurs :

1) point fixe: stable / asymptotiquement stable / instable

2) cycle limite:

3) Attracteur étrange
Ex.: système de Lorenz



Systèmes intégrables faiblement perturbés
le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM)

Système Hamiltonien autonome et intégrable en variables angle-action:

$$H = H_0(I_1, I_2) + \epsilon H_1(\theta_1, \theta_2; I_1, I_2)$$

Systèmes intégrables faiblement perturbés
le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM)

Système Hamiltonien autonome et intégrable en variables angle-action:

$$H = H_0(I_1, I_2) + \epsilon H_1(\theta_1, \theta_2; I_1, I_2)$$

$$H_1 = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} V_{n_1, n_2}(I_1, I_2) \cos(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)$$

Systèmes intégrables faiblement perturbés
le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM)

Système Hamiltonien autonome et intégrable en variables angle-action:

$$H = H_0(I_1, I_2) + \epsilon H_1(\theta_1, \theta_2; I_1, I_2)$$

$$H_1 = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} V_{n_1, n_2}(I_1, I_2) \cos(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)$$

Transformation canonique - fonction génératrice à déterminer $(\theta_i; I_i) \to (\varphi_i; J_i)$

$$F_2(\theta_1, \theta_2; J_1, J_2) = \theta_1 J_1 + \theta_2 J_2 + \epsilon \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} g_{n_1, n_2} \cos(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)$$

Systèmes intégrables faiblement perturbés
le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM)

Système Hamiltonien autonome et intégrable en variables angle-action:

$$H = H_0(I_1, I_2) + \epsilon H_1(\theta_1, \theta_2; I_1, I_2)$$

$$H_1 = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} V_{n_1, n_2}(I_1, I_2) \cos(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)$$

Transformation canonique - fonction génératrice à déterminer $(\theta_i; I_i) \to (\varphi_i; J_i)$

$$F_2(\theta_1, \theta_2; J_1, J_2) = \underbrace{\boxed{\theta_1 J_1 + \theta_2 J_2}}_{\text{identité}} + \underbrace{\boxed{\epsilon \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} g_{n_1, n_2} \cos(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)}}_{\text{corrections d'ordre epsilon}}$$

identité + corrections d’ordre epsilon

Systèmes intégrables faiblement perturbés
le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM)

Système Hamiltonien autonome et intégrable en variables angle-action:

$$H = H_0(I_1, I_2) + \epsilon H_1(\theta_1, \theta_2; I_1, I_2)$$

$$H_1 = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} V_{n_1, n_2}(I_1, I_2) \cos(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)$$

Transformation canonique - fonction génératrice à déterminer $(\theta_i; I_i) \to (\varphi_i; J_i)$

$$F_2(\theta_1, \theta_2; J_1, J_2) = \underbrace{\theta_1 J_1 + \theta_2 J_2}_{\text{identité}} + \underbrace{\epsilon \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} g_{n_1, n_2} \cos(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)}_{\text{corrections d'ordre epsilon}}$$

identité + corrections d’ordre epsilon

Calculer H1 dans les nouvelles coordonnées au plus bas ordre en epsilon
=série de Taylor avec

$$\frac{\partial F_2}{\partial \theta_i} = I_i = J_i + \epsilon \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} g_{n_1, n_2} n_i \cos(n_1\theta_1 + n_2\theta_2) \qquad \omega_i = \frac{\partial H_0}{\partial J_i}$$

Systèmes intégrables faiblement perturbés
le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM)

Système Hamiltonien autonome et intégrable en variables angle-action:

$$H = H_0(I_1, I_2) + \epsilon H_1(\theta_1, \theta_2; I_1, I_2)$$

$$H_1 = \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} V_{n_1,n_2}(I_1, I_2) \cos(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)$$

Transformation canonique - fonction génératrice à déterminer $(\theta_i; I_i) \to (\varphi_i; J_i)$

$$H(\varphi_1, \varphi_2; J_1, J_2) = H_0(J_1, J_2)$$

$$+\epsilon \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} g_{n_1,n_2}(n_1\omega_1 + n_2\omega_2) \cos(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)$$

$$+\epsilon \sum_{n_1, n_2 = -\infty}^{\infty} V_{n_1,n_2}(J_1, J_2) \cos(n_1\theta_1 + n_2\theta_2) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Systèmes intégrables faiblement perturbés
le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM)

Transformation canonique - fonction génératrice à déterminer $(\theta_i; I_i) \to (\varphi_i; J_i)$

Les termes ~ epsilon disparaissent si on choisit

$$g_{n_1,n_2} = -\frac{V_{n_1,n_2}(J_1, J_2)}{n_1\omega_1 + n_2\omega_2}$$

$$H(\varphi_1, \varphi_2; J_1, J_2) = H_0(J_1, J_2) \; + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

On itère les transformations canoniques -> perturbation de plus en plus petite $\mathcal{O}(\epsilon^{2n})$

Les tores invariants le reste - ils sont simplement déformés

Systèmes intégrables faiblement perturbés
le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM)

Transformation canonique - fonction génératrice à déterminer $(\theta_i; I_i) \to (\varphi_i; J_i)$

Les termes ~ epsilon disparaissent si on choisit

$$g_{n_1,n_2} = -\frac{V_{n_1,n_2}(J_1, J_2)}{n_1\omega_1 + n_2\omega_2}$$

$$H(\varphi_1, \varphi_2; J_1, J_2) = H_0(J_1, J_2) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

On itère les transformations canoniques -> perturbation de plus en plus petite $\mathcal{O}(\epsilon^{2n})$

Les tores invariants le reste - ils sont simplement déformés

!!!! Tout ceci n'est valable que si le développement de Taylor converge !!!!

$$\epsilon V_{n_1,n_2} \ll |n_1\omega_1 + n_2\omega_2|$$

Conclusion :
Approche non valable pour les tores résonants, proches de $n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \simeq 0$
et avec de petits $n_{1,2}$

!!! Le chaos apparaît proche des résonances !!!